ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $2025 + 720 : (72 - 9 \cdot 7) - (4 \cdot 6 - 6) \cdot 5 + 1 =$

$= 2025 + 720 : (72 - 63) - (24 - 6) \cdot 5 + 1$ — 2 BODA

$= 2025 + 720 : 9 - 18 \cdot 5 + 1$ — 1 BOD

$= 2025 + 80 - 90 + 1$ — 1 BOD

$= 2105 - 90 + 1$ — 1 BOD

$= 2016$ — 1 BOD

………………………………………………………………..….… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako je učenik točno odredio samo vrijednost izraza $72 - 9 \cdot 7$, dodjeljuje mu se 2 boda. Ako je učenik točno odredio samo vrijednost izraza $4 \cdot 6 - 6$, dodjeljuje mu se 1 bod.

2. Budući da jedan dan ima 24 sata i da je $2000 = 24 \cdot 83 + 8$, — 1 BOD
zaključujemo da je Ivanu bio rođendan prije 83 dana i 8 sati. — 1 BOD
Prosinac ima 31 dan, a studeni 30 dana, što je ukupno 61 dan. — 1 BOD
Od 31. listopada u 24 sata treba „oduzeti“ 22 dana i 8 sati. — 1 BOD
Dakle, Ivan je rođen 9. listopada u 16 sati. — 1 BOD
Budući da je Ivan 2015. godine napunio 12 godina, zaključujemo da je Ivan rođen 9. listopada 2003. godine u 16 sati. — 1 BOD
…………………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako je učenik (uz korektna objašnjenja) odredio točan datum (i godinu), ali ne i sat Ivanova rođenja, rješenje se boduje s 5 bodova.

3. Prvi način:
S obzirom da su 5, 7 i 13 prosti brojevi, onda su u parovima relativno prosti odnosno traženi broj mora biti djeljiv s $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$. — 3 BODA
Budući da je $2\,016\,000 = 4\,430 \cdot 455 + 350$, — 1 BOD
onda su traženi brojevi $4\,431 \cdot 455 = 2\,016\,105$ — 1 BOD
i $4\,432 \cdot 455 = 2\,016\,560$. — 1 BOD
…………………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: S 1 bodom boduje se zaključak da traženi broj mora biti djeljiv najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 5, 7 i 13 čak i ako taj višekratnik nije određen ili nije točno određen. Neobrazloženi zaključak da traženi broj mora biti djeljiv brojem $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$ (ako nije navedeno obrazloženje da je V(5, 7) = 35 i V(35, 13) = 455, odnosno da je V(5, 7, 13) = 455 na temelju činjenice da su brojevi 5, 7 i 13 relativno prosti) donosi samo 1 bod.

Drugi način:
S obzirom da su 5, 7 i 13 prosti brojevi, onda su u parovima relativno prosti odnosno traženi broj mora biti djeljiv brojem $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$. — 3 BODA
Budući da je $2\,016\,999 = 4\,432 \cdot 455 + 439$, — 1 BOD
onda su traženi brojevi $2\,016\,999 - 439 = 2\,016\,560$ — 1 BOD
i $2\,016\,560 - 455 = 2\,016\,105$. — 1 BOD
……………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: S 1 bodom boduje se zaključak da traženi broj mora biti djeljiv najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 5, 7 i 13 čak i ako taj višekratnik nije određen ili nije točno određen. Neobrazloženi zaključak da traženi broj mora biti djeljiv brojem $5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$ (ako nije navedeno obrazloženje da je V(5, 7) = 35 i V(35, 13) = 455, odnosno da je V(5, 7, 13) = 455 na temelju činjenice da su brojevi 5, 7 i 13 relativno prosti) donosi samo 1 bod.

4. Broj 36 260 rastavimo na umnožak prostih faktora:

$36\,260 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 37$. 2 BODA

Otac je najstariji pa zaključujemo da bi on mogao imati 37 godina. 1 BOD

U tom slučaju majka bi imala 37 – 2 = 35 godina, a 35 = 5 · 7. 1 BOD

Grupiranjem preostalih prostih faktora dobivamo

$36\,260 = 37 \cdot (5 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2) \cdot 7 = 37 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 7$ 1 BOD

i zaključujemo da bi sin mogao imati 7, a kći 7 – 3 = 4 godine (a 4 = 2 · 2).

Otac ima 37 godina, majka 35, sin 7, a kći 4 godine. 1 BOD

……………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Od učenika se očekuje objašnjenje načina grupiranja, tj. obrazloženje zašto su faktori grupirani baš na taj način. Točan rezultat bez odgovarajućeg obrazloženja boduje se s 4 boda.

5. Prvi način:

Ukupna površina svih dasaka mora biti 10 000 cm^2. 1 BOD

Ako želi policu s 4 reda, površina svake daske je 2 500 cm^2.

Ako je duljina daske 125 cm, širina joj mora biti 2500 : 125 = 20 cm. 2 BODA

Ako želi policu s 5 redova, površina svake daske treba biti 2 000 cm^2.

Širina joj je tada 2000 : 125 = 16 cm. 2 BODA

Marko treba kupiti 4 daske širine 20 cm ili 5 dasaka širine 16 cm. 1 BOD

……………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Ukupna površina svih dasaka mora biti 10 000 cm^2. 1 BOD

Ako je duljina daske 125 cm, širina svih polica mora biti ukupno 10 000 : 125 = 80 cm. 2 BODA

Ako želi policu s 4 reda, širina daske mora biti 80 : 4 = 20 cm. 1 BOD

Ako želi policu s 5 redova, širina daske mora biti 80 : 5 = 16 cm. 1 BOD

Marko treba kupiti 4 daske širine 20 cm ili 5 dasaka širine 16 cm. 1 BOD

……………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Na pločicama na kojima je jedno polje prazno (0), na preostalim poljima mogu biti 0, 1, 2, 3, 4, 5 ili 6. Za njihovo označavanje potrebna je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 točkica. 1 BOD

Na pločicama na kojima je na jednom polju 1, na preostalim poljima mogu biti 1, 2, 3, 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 6 · 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 27 točkica. 2 BODA

Na pločicama na kojima je na jednom polju 2, na preostalim poljima mogu biti 2, 3, 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 5 · 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 30 točkica. 2 BODA

Na pločicama na kojima je na jednom polju 3, na preostalim poljima mogu biti 3, 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 4 · 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 30 točkica. 1 BOD

Na pločicama na kojima je na jednom polju 4, na preostalim poljima mogu biti 4, 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 3 · 4 + 4 + 5 + 6 = 27 točkica. 1 BOD

Na pločicama na kojima je na jednom polju 5, na preostalim poljima mogu biti 5 ili 6.

Za njihovo označavanje potrebno je 2 · 5 + 5 + 6 = 21 točkica. 1 BOD

Na pločici na kojoj je na jednom polju 6, na preostalom polju može biti 6.

Za označavanje je potrebno 12 točkica. 1 BOD

U kompletu domino pločica ima ukupno 21 + 27 + 30 + 30 + 27 + 21 + 12 = 168 točkica. 1 BOD

……………………………………………..………………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Komplet domino pločica može se prikazati na sljedeći način.

0, 0				
0, 1	1, 1			
0, 2	1, 2	2, 2		
0, 3	1, 3	2, 3	3, 3	
...	...	.....	....	
0, 6	1, 6	2, 6	....	6, 6

Pločica na kojima se nalazi barem jedno prazno polje ima 7, pločica na kojima se nalazi jedna točkica (1) na jednom polju, a na drugom jedna ili više točkica ima 6, pločica na kojima se nalaze dvije točkice (2) na jednom polju, a na drugom dvije ili više točkica ima 5, pločica na kojima se nalaze tri točkice (3) na jednom polju, a na drugom tri ili više točkica ima 4,..., pločica na kojima se na oba polja nalazi šest točkica (6) ima 1. 3 BODA

Ukupno ima 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 domino pločica, odnosno 56 polja na kojima se nalazi ravnomjerno raspoređenih 7 brojeva. Svaki broj pojavljuje se 56 : 7 = 8 puta. 3 BODA

$8\cdot0+8\cdot1+8\cdot2+8\cdot3+8\cdot4+8\cdot5+8\cdot6=$

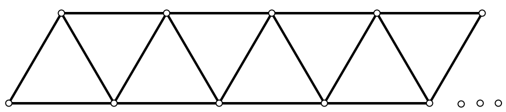
$=8\cdot(1+2+3+4+5+6)=$

$=8\cdot21=168$ 3 BODA

U kompletu domino pločica ukupan broj točkica je 168. 1 BOD

………………………………………………...…………………….....…… UKUPNO 10 BODOVA

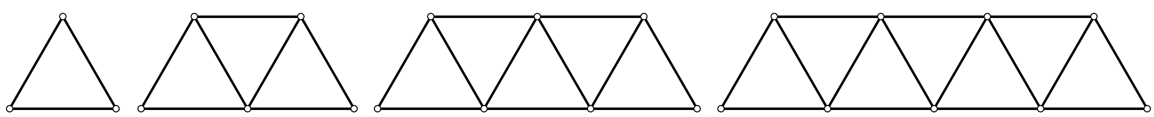
7. Prvi način:
Promotrimo li sliku:



može se primijetiti da za prvi trokut Dijana mora uzeti 3 šibice,
a za svaki sljedeći trokut u nizu treba dodati samo 2 nove šibice. 2 BODA

Pomoću 99 šibica Dijana je napravila početni trokut i još (99 – 3) : 2 = 48 dodatnih trokuta, dakle njih 49. 2 BODA

Promotrimo li nizove koji su sastavljeni od neparnog broja trokuta,



uočavamo da je broj trokuta koji su „okrenuti prema gore“ za 1 veći od broja trokuta koji su „okrenuti prema dolje“.

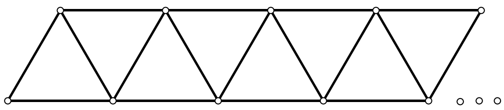
Dakle, od n trokuta njih $(n+1):2$ je „okrenuto prema gore“. 2 BODA

Udaljenost dviju najudaljenijih točaka tada je $((n+1):2)\cdot a$, pri čemu je a duljina stranice trokuta.
2 BODA

U nizu od 49 trokuta, „prema gore okrenutih“ ima 25, a tražena udaljenost je 25 · 5 = 125 cm.
2 BODA

………………………………………………...…………………….....…… UKUPNO 10 BODOVA

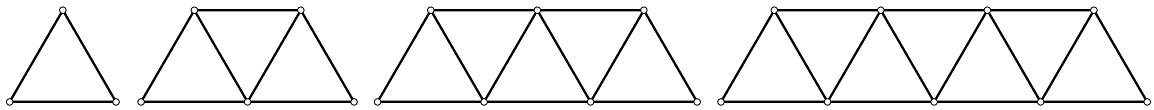
Drugi način:
Na temelju slike



zaključujemo:

Broj trokuta	1	2	3	4	5	…	x
Broj šibica	3	5	7	9	11	…	$2x + 1$

tj. da je za izradu niza koji sadrži x trokuta potrebno $2x + 1$ šibica. 2 BODA
Ako je Dijana upotrijebila 99 šibica, složila je $(99 - 1) : 2 = 49$ trokuta u nizu. 2 BODA
Promotrimo nizove koji su sastavljeni od neparnog broja trokuta.

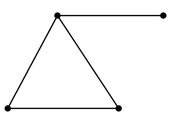


Označimo li duljinu stranice trokuta s a, možemo pisati:

Broj trokuta	1	3	5	7	…	n
Razmak najudaljenijih točaka	$1 \cdot a$	$2 \cdot a$	$3 \cdot a$	$4 \cdot a$	…	$((n + 1) : 2) \cdot a$

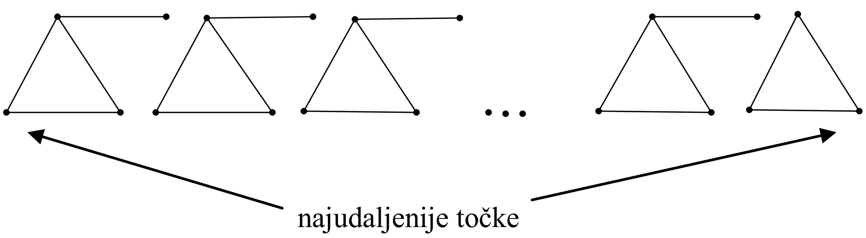
Dakle, ako u nizu ima neparan broj trokuta, razmak najudaljenijih točaka je
((broj trokuta + 1) : 2) · duljina stranice trokuta. 3 BODA
Za niz od 49 trokuta traženi je razmak jednak ((49 + 1) : 2) · duljina stranice trokuta.
Ako je svaka šibica duga $a = 5$ cm, tada udaljenost dviju najudaljenijih točaka iznosi
$(50 : 2) \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$ cm. 3 BODA
…………………………………………………..……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:
Niz jednakostraničnih trokuta može se podijeliti na dijelove koji se sastoje od 4 šibice.



2 BODA

Budući da je $99 = 24 \cdot 4 + 3$, od 99 šibica mogu se složiti 24 takva dijela i još ostaju 3 šibice od kojih je moguće složiti posljednji jednakostranični trokut. 2 BODA



najudaljenije točke 4 BODA

Na slici su radi zornosti dijelovi odvojeni.
Udaljenost dviju najudaljenijih točaka je zbroj duljina 25 šibica, tj. $25 \cdot 5 = 125$ cm. 2 BODA
………………………………………………..……………………..…… UKUPNO 10 BODOVA