ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}$

$(x+10^{2015}+x-10^{2015})(x+10^{2015}-x+10^{2015})=10^{2016}$ 2 BODA

$(2x)(2\cdot 10^{2015})=10^{2016}$ 1 BOD

$4x\cdot 10^{2015}=10^{2016}$ 1 BOD

$4x=10$ 1 BOD

$x=\frac{5}{2}$ 1 BOD

……………………………………………………………...……….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$(x+10^{2015})^2-(x-10^{2015})^2=10^{2016}$

Kvadriranjem zbroja i razlike dobivamo:

$x^2+2x\cdot 10^{2015}+10^{4030}-(x^2-2x\cdot 10^{2015}+10^{4030})=10^{2016}$ 2 BODA

$x^2+2x\cdot 10^{2015}+10^{4030}-x^2+2x\cdot 10^{2015}-10^{4030}=10^{2016}$ 1 BOD

$4x\cdot 10^{2015}=10^{2016}$ 1 BOD

$4x=10$ 1 BOD

$x=\frac{5}{2}$ 1 BOD

……………………………………………………….………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^5b^2}{c^3}\cdot\frac{c^4}{a^3b^5}=\frac{a^2c}{b^3}.$ 1 BOD

Iz omjera $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$ dobijemo

$(ac):(bc)=3:1,\ (ab):(ac)=5:3$ 1 BOD

odnosno

$\frac{ac}{bc}=\frac{3}{1},\quad \frac{a}{b}=\frac{3}{1};$ 1 BOD

$\frac{ab}{ac}=\frac{5}{3},\quad \frac{b}{c}=\frac{5}{3},\quad \frac{c}{b}=\frac{3}{5}.$ 1 BOD

Uvrstimo vrijednosti $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{b}$ u početni izraz

$$\frac{a^2c}{b^3}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{c}{b}=\left(\frac{3}{1}\right)^2\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{5}.$$

Vrijednost zadanog izraza je $\frac{27}{5}$ ili $5\frac{2}{5}$ ili 5.4. 2 BODA

………………………………………………………………….………..,…. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^5b^2}{c^3}\cdot\frac{c^4}{a^3b^5}=\frac{a^2c}{b^3}.$$ 1 BOD

Iz omjera $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$ dobijemo

$(ac):(bc)=3:1$	$(ab):(ac)=5:3$	1 BOD
$\frac{ac}{bc}=\frac{3}{1}$	$\frac{ab}{ac}=\frac{5}{3}$	
$\frac{a}{b}=\frac{3}{1}$	$\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$	
$a:b=3:1$	$b:c=5:3$	1 BOD

Omjer $a:b=3:1$ proširimo brojem 5 pa vrijedi $a:b=15:5$.

Iz dva jednostavna omjera dobijemo prošireni omjer

$a:b=15:5$ i $b:c=5:3 \Rightarrow a:b:c=15:5:3$. 1 BOD

Slijedi da je $a=15k$, $b=5k$, $c=3k$. Uvrstimo *a, b* i *c* u zadani izraz

$$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^2c}{b^3}=\frac{(15k)^2\cdot 3k}{(5k)^3}=\frac{15\cdot 15\cdot 3\cdot k^3}{5\cdot 5\cdot 5\cdot k^3}=\frac{27}{5}.$$ 2 BODA

………………………………………………………………..………..… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

$$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^5b^2}{c^3}\cdot\frac{c^4}{a^3b^5}=\frac{a^2c}{b^3}.$$ 1 BOD

Iz omjera $(ab):(ac):(bc)=5:3:1$ dobijemo

$(ac):(bc)=3:1$	$(ab):(ac)=5:3$	1 BOD
$\frac{ac}{bc}=\frac{3}{1}$	$\frac{ab}{ac}=\frac{5}{3}$	
$\frac{a}{b}=\frac{3}{1}$	$\frac{b}{c}=\frac{5}{3}$	
$a=3b$	$c=\frac{3b}{5}$	2 BODA

Uvrstimo a i c u zadani izraz

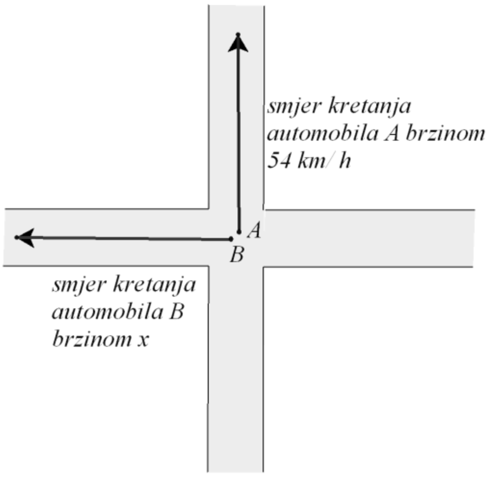
$$\frac{a^5b^2}{c^3}:\frac{a^3b^5}{c^4}=\frac{a^2c}{b^3}=\frac{(3b)^2\cdot\frac{3b}{5}}{b^3}=\frac{9b^2\cdot 3b}{5b^3}=\frac{27}{5}.$$ 2 BODA

……………………….……………………………………..………..……… UKUPNO 6 BODOVA

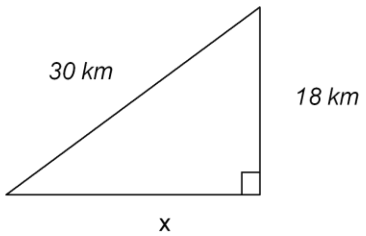
Napomena 1: Zadatak se može riješiti i tako da se *b* i *c* izraze preko *a* ili tako da se *a* i *b* izraze preko *c*. U oba slučaja rješenje treba vrednovati u skladu s predloženim načinom vrednovanja.

Napomena 2: Zadatak se može riješiti uvrštavanjem u početni izraz, bez prethodnog pojednostavljivanja (1. korak!), i u tom slučaju točan rezultat treba vrednovati sa 6 bodova.

3. Označimo automobile s A i B.
Skica: 1 BOD



Iz uvjeta zadatka uočavamo da se kretanje automobila može skicirati pravokutnim trokutom.
1 BOD

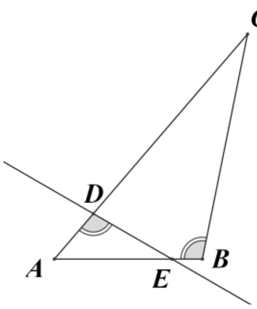


Ako se automobil A kreće brzinom od 54 km/ h, nakon 20 minuta prevalit će udaljenost od 18 kilometara. 1 BOD
Za to će vrijeme automobil B prevaliti put od 24 km jer je prema Pitagorinom poučku
$x = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24$. 2 BODA
Ako u dvadeset minuta automobil prevali put od 24 km, za jedan sat prevalit će trostruko dulji put, tj. 72 km. Dakle, njegova brzina iznosi 72 km/ h. 1 BOD
……………………………………………………………….……..……… UKUPNO 6 BODOVA

4. Decimalni zapis razlomka $\frac{11}{21}$ je $0.\dot{5}2380\dot{9}$, a zbroj svih šest znamenaka u periodu je 27.
2 BODA

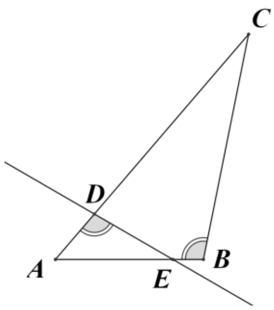
Kako je 2016 = 27 · 74 + 18, potrebno je zbrojiti 74 skupine po 6 navedenih znamenaka i još četiri (5+2+3+8) koje daju 18. 2 BODA
Ukupan broj decimala koje treba zbrojiti je 74 · 6 + 4 = 448. 2 BODA
……………………………………………………………………….….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:
Skica: 1 BOD



Kutovi $\measuredangle ADE$ i $\measuredangle CBA$ su sukladni i kutovi $\measuredangle EAD$ i $\measuredangle BAC$ su sukladni (zajednički) pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi da su trokuti *ADE* i *ABC* slični. 1 BOD
Ako su trokuti slični, duljine odgovarajućih stranica su im u istom omjeru
$|AE|:|AD|=|AC|:|AB|=2:1$ pa vrijedi 1 BOD
$|AE|=2|AD|$. 1 BOD
Iz uvjeta odnosa duljina stranica $|AD|$ i $|AE|$ slijedi
$|AE|=|AD|+6$
$2|AD|=|AD|+6$ 1 BOD
$|AD|=6\,\text{mm}$, $|AE|=12\,\text{mm}$ 1 BOD
……………………..……………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

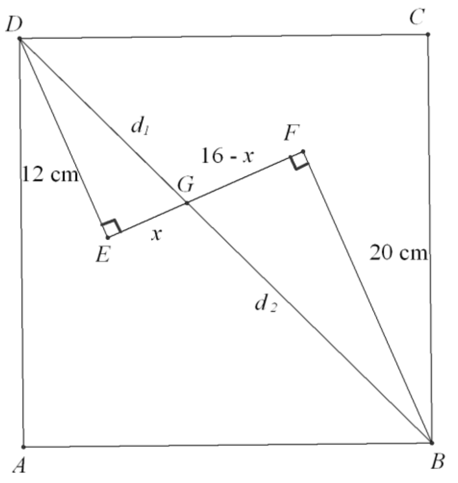
Drugi način:
Skica: 1 BOD



Kutovi $\measuredangle ADE$ i $\measuredangle CBA$ su sukladni i kutovi $\measuredangle EAD$ i $\measuredangle BAC$ su sukladni (zajednički) pa prema poučku K-K o sličnosti slijedi da su trokuti *ADE* i *ABC* slični. 1 BOD
Iz uvjeta zadatka je $|AE|=|AD|+6$.
Označimo $|AD|$ s *x*.
Tada iz sličnosti trokuta *ADE* i *ABC* slijedi $|AC|:|AE|=|AB|:|AD|$ odnosno
60 : (*x*+6) = 30 : *x*. 1 BOD
Rješavanjem razmjera dobijemo
60*x* = 30*x* + 180 1 BOD
30*x* = 180
x = 6 mm. 1 BOD
Dakle, $|AD|=6\,\text{mm}$, $|AE|=12\,\text{mm}$. 1 BOD
……………………………………………………………...……………… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Dijagonala $\overline{BD}$ dijeli dužinu $\overline{EF}$ na dva dijela. Označimo ih s x i $16-x$.

Pravokutni trokuti *DEG* i *BFG* su slični jer se podudaraju u dva kuta (oba imaju pravi kut, a kutovi $\measuredangle EGD$ i $\measuredangle FGB$ su jednaki jer su vršni kutovi). 2 BODA

Zato vrijedi $12 : x = 20 : (16-x) \Rightarrow 32x = 192 \Rightarrow x = 6\,\text{cm}$. 2 BODA

Prema Pitagorinom poučku je

$d_1 = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$ 1 BOD

i $d_2 = \sqrt{10^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}$ 1 BOD

pa je dijagonala kvadrata $d = d_1 + d_2 = 16\sqrt{5}$, 1 BOD

a stranica kvadrata $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{10}\ \text{cm}$. 1 BOD

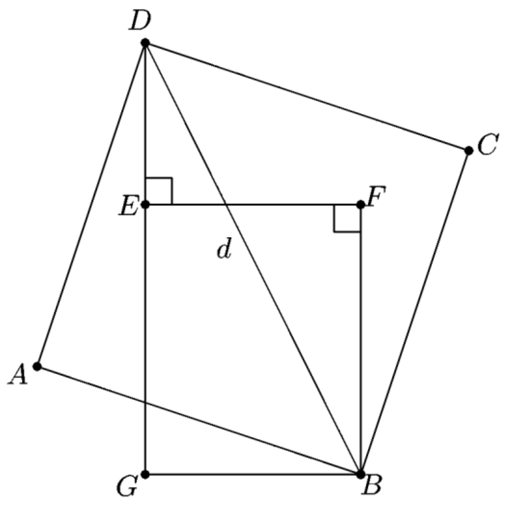
Površina kvadrata je $P = a^2 = 640\ \text{cm}^2$. 1 BOD

………………………………..……………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Produljimo dužinu $\overline{DE}$, a kroz točku *B* nacrtajmo paralelu s dužinom $\overline{EF}$ tako da se sijeku u točki *G*, kao na slici.

Skica: 1 BOD



Četverokut *EGBF* je pravokutnik jer su mu kutovi u vrhovima *E* i *F* pravi i jer je $EF \parallel GB$.
(Trapez kojem su dva kuta uz istu osnovicu prava!) 1 BOD

Zato je $|EG| = |FB| = 20$ cm, a $|GB| = |EF| = 16$ cm. 2 BODA

Trokut *DGB* je pravokutan jer je kut u vrhu *G* pravi. 1 BOD

Kako je $|DG| = |DE| + |EG| = 12 + 20 = 32$ cm, 1 BOD

prema Pitagorinom poučku slijedi

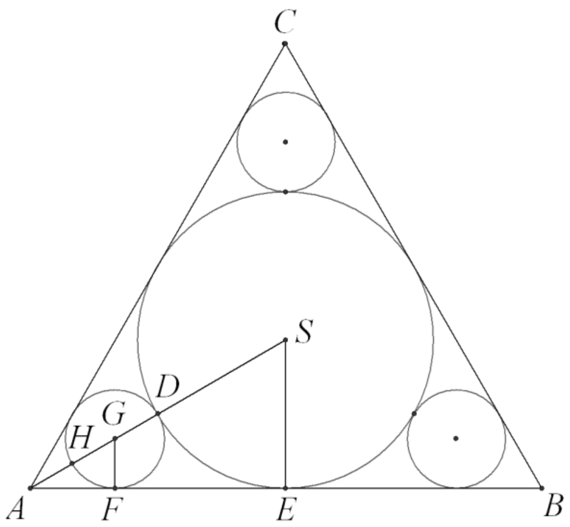
$d = \sqrt{|DG|^2 + |GB|^2} = \sqrt{32^2 + 16^2} = \sqrt{1024 + 256} = \sqrt{1280} = 16\sqrt{5}$ cm. 2 BODA

Kako je $d = a\sqrt{2}$, slijedi $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{10}$ cm 1 BOD

odnosno $P = a^2 = 640\ \text{cm}^2$. 1 BOD

…………………………………………..…………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Neka je točka *S* središte upisanog kruga. Dakle, točka *S* je sjecište simetrala kutova.

$|\measuredangle BAC| = 60^o$, a pravac AS je simetrala kuta $\measuredangle BAC$ pa je $|\measuredangle EAS| = 30^o$. 1 BOD

Točka *E* je diralište, $\overline{SE} \perp \overline{AB} \Rightarrow |\measuredangle AES| = 90^o$.

Točka *F* je diralište, $\overline{GF} \perp \overline{AB} \Rightarrow |\measuredangle AFG| = 90^o$. 1 BOD

Trokuti ΔAFG i ΔAES su pravokutni s kutovima 30^o i 60^o $\Rightarrow$ duljina hipotenuze dvostruko je dulja od duljine kraće katete: $|AG| = 2|GF|$, $|AS| = 2|SE|$ 1 BOD

Označimo s *R* polumjer većeg kruga, a s *r* polumjer manjeg kruga.

$R = |SE| = |SD|$, a kako je $|AS| = 2|SE|$, slijedi da je $|AD| = R$. 1 BOD

$r = |GD| = |GF| = |GH|$, a kako je $|AG| = 2|GF|$, slijedi da je $|AH| = r$. 1 BOD

$R = |AD| = |AH| + |HG| + |GD| = r + r + r = 3r$ 1 BOD

Površina većeg kruga: $P_V = R^2\pi = (3r)^2\pi = 9r^2\pi$. 1 BOD

Površina manjeg kruga: $P_M = r^2\pi$. 1 BOD

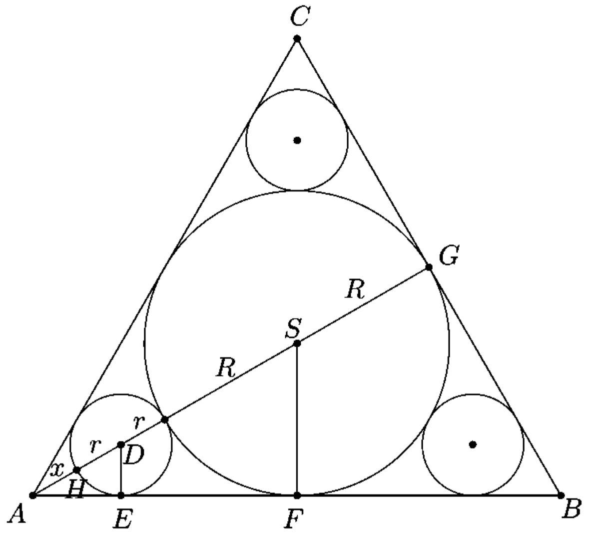
Izračunamo traženi odnos $\frac{P_V}{3P_M}=\frac{9r^2\pi}{3r^2\pi}=\frac{3}{1}=3:1.$

Odnos površine kruga *k* i zbroja površina tri upisana kruga iznosi $3:1.$ 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Neka je *a* duljina stranice jednakostraničnog trokuta *ABC*.

Visina $\overline{AG}$ pripada simetrali kuta $\measuredangle BAC$, R je duljina polumjera trokutu ABC upisane kružnice i iznosi trećinu duljine visine $\overline{AG}$ pa je $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Dužina $\overline{AS}$ je polumjer trokutu *ABC* opisane kružnice i njena duljina iznosi dvije trećine duljine visine $\overline{AG}$ pa je $|AS|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 1 BOD

Trokuti *AED* i *AFS* su pravokutni trokuti sa sukladnim šiljastim kutovima (30° i 60°) pa su prema poučku K-K o sličnosti slični. 1 BOD

Zato za njihove duljine stranica vrijedi $\frac{|AS|}{|AD|}=\frac{R}{r}$, tj. $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{x+r}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{r}$ odakle se sređivanjem dobije *r* = *x*. 2 BODA

Visina $\overline{AG}$ ima duljinu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ i vrijedi $x+2r+2R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, a nadalje $r=\frac{a\sqrt{3}}{18}$. 2 BODA

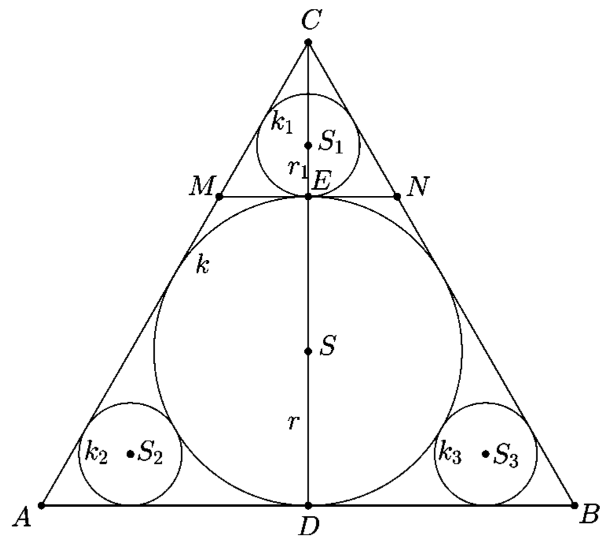
Površina triju upisanih krugova koji dodiruju veliki krug je $P_3=3\cdot r^2\pi=3\cdot\left(\frac{a\sqrt{3}}{18}\right)^2\pi=\frac{a^2\pi}{36}$,

a površina velikog kruga je $P=R^2\pi=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\pi=\frac{a^2\pi}{12}$. 2 BODA

Omjer površina velikog kruga i zbroja površina triju malih krugova je 3 : 1. 1 BOD

…………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:
Skica: 1 BOD



Polumjer kružnice upisane jednakostraničnom trokutu *ABC* označimo s *r*.

Kako se središte upisane kružnice u jednakostraničnom trokutu podudara s njegovim težištem, a visina s težišnicom i kako težište dijeli težišnicu u omjeru 2:1 od vrha prema polovištu nasuprotne stranice, slijedi da je polumjer upisane kružnice jednak $r = \frac{1}{3}v$, gdje je *v* duljina visine jednakostraničnog trokuta *ABC*. 2 BODA

Preostale tri kružnice (k_1, k_2, k_3) su sukladne, pa je dovoljno promatrati samo jednu (k_1).

Neka je *E* sjecište visine $\overline{CD}$ i kružnice *k* koje nije na stranici $\overline{AB}$.

Tada je $|CE| = |ES| = |SD| = r$. 1 BOD

Nacrtajmo paralelu s pravcem *AB* kroz točku *E*. Ona siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama *M* i *N*.
Trokut *MNC* je također jednakostraničan, jer su mu svi kutovi jednaki 60°. 1 BOD

Duljina visine trokuta *MNC* jednaka je $v_1 = |CE| = r$. 1 BOD

Kružnica k_1 je upisana kružnica jednakostraničnom trokutu *MNC* pa za njen polumjer r_1 vrijedi

$r_1 = \frac{1}{3}v_1 = \frac{1}{3}r$. 2 BODA

Zato je omjer površine velikog kruga i zbroja površina tri mala kruga jednak

$$\frac{r^2\pi}{3r_1^2\pi} = \frac{r^2}{3\cdot\left(\frac{1}{3}r\right)^2} = \frac{r^2}{3\cdot\frac{r^2}{9}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3:1.$$ 2 BODA

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA